$\boxed{1}$

(1)

$$
\begin{aligned}
2\left(a^4+b^4\right)-(a+b)\left(a^3+b^3\right) &= a^4-ba^3-b^3a+b^4 \\
&= a^3(a-b)-b^3(a-b) \\
&= (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right) \\
&= (a-b)^2\left\{\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\right\}
\end{aligned}
$$

$\therefore 2\left(a^4+b^4\right) \geq (a+b)\left(a^3+b^3\right)$ （$a=b$ のとき等号成立）

(2)

解法 1

(1)より，

$2\left(a^4+b^4\right) \geq (a+b)\left(a^3+b^3\right)$ （$a=b$ のとき等号成立） ・・・①

$2\left(b^4+c^4\right) \geq (b+c)\left(b^3+c^3\right)$ （$b=c$ のとき等号成立） ・・・②

$2\left(c^4+a^4\right) \geq (c+a)\left(c^3+a^3\right)$ （$c=a$ のとき等号成立） ・・・③

①＋②＋③より，

$4a^4+4b^4+4c^4 \geq 2a^4+2b^4+2c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$

（$a=b=c$ のとき等号成立）

$\therefore 3\left(a^4+b^4+c^4\right) \geq a^4+b^4+c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$

（$a=b=c$ のとき等号成立）

一方，$(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)=a^4+b^4+c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$

よって，$3\left(a^4+b^4+c^4\right) \geq (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)$ （$a=b=c$ のとき等号成立）

解法 2

$$
\begin{aligned}
3\left(a^4+b^4+c^4\right) &= 2\left(a^4+b^4\right)+a^4+b^4+3c^4 \\
&\geq (a+b)\left(a^3+b^3\right)+a^4+b^4+3c^4 \quad (a=b\text{のとき等号成立}) \\
&= 2a^4+2b^4+3c^4+a^3b+ab^3 \\
&= 2\left(b^4+c^4\right)+c^4+2a^4+a^3b+ab^3 \\
&\geq (b+c)\left(b^3+c^3\right)+c^4+2a^4+a^3b+ab^3 \quad (b=c\text{のとき等号成立}) \\
&= 2\left(c^4+a^4\right)+b^4+b^3c+bc^3+a^3b+ab^3 \\
&\geq (c+a)\left(c^3+a^3\right)+b^3+b^3c+bc^3+a^3b+ab^3 \quad (c=a\text{のとき等号成立}) \\
&= a^4+b^4+c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b
\end{aligned}
$$

一方，$(a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)=a^4+b^4+c^4+a^3b+a^3c+b^3a+b^3c+c^3a+c^3b$

よって，$3\left(a^4+b^4+c^4\right) \geq (a+b+c)\left(a^3+b^3+c^3\right)$ （$a=b=c$ のとき等号成立）

参考

基本不等式の文字種を増やす方法

http://www.toitemita.sakura.ne.jp/suugakukonetapdf/inequality-the%20number%20of%20letters.pdf

$\boxed{2}$

(1)

$AB=BA$ より，$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\therefore \begin{pmatrix} 2y & 2w \\ -x+3y & -z+3w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -z & 2x+3z \\ -w & 2y+3w \end{pmatrix}$

よって，$\begin{cases} 2y=-z & \cdots① \\ -x+3y=-w & \cdots② \\ 2w=2x+3z & \cdots③ \\ -z+3w=2y+3w & \cdots④ \end{cases}$

①より，④が成り立つ。

①，②より，$2w=2x-6y$ $\therefore -x+3y=-w$ よって，②が成り立つ。

よって，$AB=BA$ が成り立つためには、$2y=-z$，$-x+3y=-w$ であればよい。

$$\begin{aligned}\therefore B&=\begin{pmatrix} x & z \\ y & w \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x-3y \end{pmatrix}\\ &=\begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & -3y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}\\ &=-y\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\ &=-yA+xE\end{aligned}$$

これより，$-y=a$，$x=b$ とおけば，$B=aA+bE$ と表される。

(2)

$B=\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x-3y \end{pmatrix}$ の逆行列が存在するから，$x(x-3y)+2y^2\neq 0$

これと $x(x-3y)+2y^2=x^2-3xy+2y^2=(x-y)(x-2y)$ より，$(x-y)(x-2y)\neq 0$

よって，

$$\begin{aligned}B^{-1}&=\frac{1}{(x-y)(x-2y)}\begin{pmatrix} x-3y & 2y \\ -y & x \end{pmatrix}\\ &=\frac{y}{(x-y)(x-2y)}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}+\frac{x-3y}{(x-y)(x-2y)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\\ &=\frac{y}{(x-y)(x-2y)}A+\frac{x-3y}{(x-y)(x-2y)}E\end{aligned}$$

これより，$\dfrac{y}{(x-y)(x-2y)}=c$，$\dfrac{x-3y}{(x-y)(x-2y)}=d$ とおけば，$B^{-1}=cA+dE$ と表される。

(3)

$B=\begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x-3y \end{pmatrix}$，　$B^{-1}=\dfrac{1}{(x-y)(x-2y)}\begin{pmatrix} x-3y & 2y \\ -y & x \end{pmatrix}$，　$B=B^{-1}$ より，

$$\begin{cases} x=\dfrac{x-3y}{(x-y)(x-2y)} & \cdots⑤ \\ y=-\dfrac{y}{(x-y)(x-2y)} & \cdots⑥ \\ -2y=\dfrac{2y}{(x-y)(x-2y)} & \cdots⑦ \\ x-3y=\dfrac{x}{(x-y)(x-2y)} & \cdots⑧ \end{cases}$$

⑥または⑦より，　$y(x-y)(x-2y)=-y$

$\therefore (x-y)(x-2y)=-1$（$\because xy\neq 0$ より，　$x\neq 0, y\neq 0$）　・・・⑨

これを⑤または⑧に代入すると，　$x=-(x-3y)$　$\therefore y=\dfrac{2}{3}x$　・・・⑩

⑨，⑩より，　$\dfrac{x^2}{9}=1$　$\therefore x=\pm 3$，　$y=\pm 2$

ゆえに，　$B=\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$　・・・(答)

$\boxed{3}$

(1)

曲線の方程式

$y=\dfrac{1}{2}$ より，$z=\sqrt{1-\left(x^2+\dfrac{1}{4}\right)}$

よって，求める曲線の方程式は，$z=\sqrt{\dfrac{3}{4}-x^2}$，$y=\dfrac{1}{2}$ ・・・(答)

***x_1，z_1* がみたす関係式**

$z=\sqrt{\dfrac{3}{4}-x^2}$，$y=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2+z^2=\dfrac{3}{4}$，$z\geq 0$，$y=\dfrac{1}{2}$

よって，この曲線は半円を表す。

解法 1

これと点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ が直線 l_1 と半円との接点であることから，

直線 l_1 の方程式は，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}x+\dfrac{1}{2}z=\dfrac{3}{4}, y=\dfrac{1}{2}$

よって，直線 l_1 上の任意の点 $\left(x_1,\dfrac{1}{2},z_1\right)$ がみたす関係式は，$\dfrac{x_1}{\sqrt{2}}+\dfrac{z_1}{2}=\dfrac{3}{4}$ ・・・(答)

解法 2

直線 l_1 上の任意の点を P とすると，$\mathrm{P}\left(x_1,\dfrac{1}{2},z_1\right)$

半円の中心を O とすると，$\mathrm{O}\left(0,\dfrac{1}{2},0\right)$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\begin{pmatrix} x_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ z_1-\dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \dfrac{1}{2} \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+0\cdot 0+\dfrac{1}{2}\left(z_1-\dfrac{1}{2}\right)=0$ $\quad\therefore \dfrac{x_1}{\sqrt{2}}+\dfrac{z_1}{2}=\dfrac{3}{4}$ ・・・(答)

(2)

曲線の方程式

$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より， $z=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{2}+y^2\right)}$

よって，求める曲線の方程式は， $z=\sqrt{\dfrac{1}{2}-y^2}$ ， $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 　・・・(答)

y_2，z_2 がみたす関係式

$y_2+z_2=1$

解き方は(1)と同じだから，省略。

(3)

平面の法線ベクトルを $\vec{n}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\neq\vec{0}$，平面上の任意の点を $\mathrm{Q}(x,y,z)$ とすると，

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$ より， $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\\y-\dfrac{1}{2}\\z-\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}=0$

よって，平面の方程式は， $a\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+b\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+c\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0$

平面は，その性質より，異なる 3 点でただ 1 通りに定められるから，

直線 l_1 上の点 $\left(0,\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right)$, 直線 l_2 上の点 $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},0,1\right)$, 点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\right)$ を代入することにより，

$-\dfrac{a}{\sqrt{2}}+c=0$ ， $-\dfrac{b}{2}+\dfrac{c}{2}=0$ 　 $\therefore a=\sqrt{2}b=\sqrt{2}c$

$\therefore a\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(z-\dfrac{1}{2}\right)=0$

$\therefore \dfrac{a}{\sqrt{2}}\left\{\sqrt{2}\left(x-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)+\left(z-\dfrac{1}{2}\right)\right\}=0$

$\therefore \dfrac{a}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}x+y+z-2\right)=0$

ここで， $a=0$ とすると， $a=b=c=0$ より， $\vec{n}=\vec{0}$ となり不適。よって， $a\neq 0$

$\therefore \sqrt{2}x+y+z=2$ 　・・・(答)

$\boxed{4}$

$y = f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$　$\left(0 \le x \le \sqrt{3}\right)$，　$y = g(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x$　$\left(0 \le x \le \sqrt{3}\right)$　とおくと，

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= \frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x \\
&= \frac{x}{4}\left(\frac{4x}{1+x^2} - \sqrt{3}\right) \\
&= \frac{x}{4}\cdot\frac{-\sqrt{3}x^2 + 4x - \sqrt{3}}{1+x^2} \\
&= \frac{-x\left(\sqrt{3}x^2 - 4x + \sqrt{3}\right)}{4\left(1+x^2\right)} \\
&= \frac{-x\left(x-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}x - 1\right)}{1+x^2}
\end{aligned}$$

よって，

$0 \le x \le \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，　$f(x) \le g(x)$

$\dfrac{1}{\sqrt{3}} \le x \le \sqrt{3}$ のとき，　$f(x) \ge g(x)$

$$\begin{aligned}
&\therefore \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \{g(x) - f(x)\}dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \{f(x) - g(x)\}dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \{f(x) - g(x)\}dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \{f(x) - g(x)\}dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{1}{1+x^2} - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left\{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right) - \frac{1}{1+x^2}\right\}dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left\{\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right) - \frac{1}{1+x^2}\right\}dx \\
&= -\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{4}x\right)dx + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= -\left[x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} + \left[x - \frac{\sqrt{3}}{8}x^2\right]_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx \\
&= \frac{\sqrt{3}}{24} + \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{1}{1+x^2}dx - \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+x^2}dx
\end{aligned}$$

ここで，$x = \tan\theta$ とおくと，$\dfrac{dx}{d\theta} = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$ より，$dx = \dfrac{d\theta}{\cos^2\theta}$

$x = \sqrt{3} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{3}$，$x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{6}$，$x = 0 \Rightarrow \theta = 0$

$$\frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{1+\tan^2\theta} = \frac{1}{\dfrac{1}{\cos^2\theta}} = \cos^2\theta$$

よって，

$$\begin{aligned}\therefore \int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \{g(x) - f(x)\}dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} \{f(x) - g(x)\}dx &= \frac{\sqrt{3}}{24} + \int_0^{\frac{\pi}{6}} d\theta - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{3}}{24} + [\theta]_0^{\frac{\pi}{6}} - [\theta]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{24}\end{aligned}$$

よって，求める面積は，$\dfrac{\sqrt{3}}{24}$ ・・・(答)